ALGEBRA M2 - Lista 2

Macierze przekształceń liniowych

Zad.1. Wyznaczyć macierze podanych przekształceń liniowych:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gdzie $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$,
2. $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$, gdzie $T(ax^2 + bx + c) = (-a, b, -c)$,
3. $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$, gdzie $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, b, b, c + d)$

w bazach kanonicznych. Zbadać, które z tych przekształceń są izomorfizmami.

Zad.2. Znaleźć wzór analityczny na przekształcenie $T \in L(\mathbb{R}_1[x])$, którego macierz w bazie $B = \{1 + x, -x\}$ ma postać

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zad.3. Niech $w \in \mathbb{R}^3$ będzie niezerowym wektorem. Wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ określonego wzorem $T(v) = w \times v$ w bazie kanonicznej jeśli $w = (1, 1, 1)$.

Zad.4. Przekształcenie T ma w bazie $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Znaleźć macierz tego przekształcenia w bazie $B' = \{2v_1, v_2 + v_3, -v_1 + 2v_2 - v_3\}$.

Zad.5. Przekształcenie liniowe T ma w bazie kanonicznej B przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Znaleźć macierz tego przekształcenia w bazie $B' = \{1, 1 - x, 1 - x + x^2\}$.

Zad.6. Znaleźć macierz przekształcenia przestrzeni $\mathbb{R}^2$ w siebie, przedstawiające następujące operacje na wektorach zaczepionych w punkcie $(0, 0)$:

1. obrót o kąt α,
2. odbicie względem prostej x,
3. odbicie względem prostej y,
4. odbicie względem punktu $(0, 0)$.

Zad.7. Wynaczyć macierz przekształcenia liniowego $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ polegającego na pomnożeniu każdej macierzy przez macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

w bazie kanonicznej.

Zad.8. Pokazać, że jeżeli $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ oraz $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ są bazami w przestrzeni liniowej V i P jest macierzą przejścia z bazy A do bazy B, to macierz P^{-1} jest macierzą przejścia z bazy B do bazy A.

Zad.9. Pokazać, że jeżeli $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ oraz $C = \{u_1, \ldots, u_n\}$są bazami w przestrzeni liniowej V i P jest macierzą przejścia z bazy A do bazy B, a macierz Q jest macierzą przejścia z bazy B do bazy C, to macierz PQ jest macierzą przejścia z bazy A do bazy C.

Zad.10. Niech będzie dane przekształcenie liniowe: $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ zadane wzorem

$$Df = f'$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$. Znaleźć macierze przekształceń $D, D^2, \ldots, D^{n+1}$ w bazie kanonicznej $A = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, gdzie D^k jest k-krotnym złożeniem D z samym sobą.

Zad.11. Niech będzie dane przekształcenie liniowe: $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+1}[x]$ zadane wzorem

$$T(f) = g, \text{ gdzie } g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Znaleźć macierz przekształcenia T w bazach kanonicznych obu przestrzeni.

Zad.12. Niech $T \in L(V, W)$ będzie przekształceniem różnowartościowym (iniekcją) i niech $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ będzie zbiorem wektorów liniowo niezależnych. Pokazać, że zbiór $T(A) := \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych.

Romuald Lenczewski